中国科学技术大学数学科学学院

2020—2021学年第二学期考试试卷

■A 卷　　□B 卷

课程名称: 数学物理方程(A)　　课程编号: 001506

姓名: 李治平　　学号: PB19020649　　专业: 物理

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分	11	16	5	13	10	13	10	6	78

一(12分) 求以下固有值问题的固有值,固有函数.

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \ (0<x<21) \\ y(0)=0, \ y(21)=0. \end{cases}$$

二(16分) 考虑如下形式定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt}=4u_{xx}+f(t,x), \ (t>0, \ -\infty<x<+\infty) \\ u(0,x)=2x^2, \ u_t(0,x)=3\cos x \end{cases}$$

(1) 在$f(t,x)=0$时，求此问题的解。

(2) 在$f(t,x)=t^2x+5\sin 2t\sin x$时，求此问题的解。

三(10分)求解定解问题

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x}-3y\dfrac{\partial u}{\partial y}+u=0, \\ u(1,y)=y+3y^2 \end{cases}$$

四. (14分)求解混合问题:

$$\begin{cases} u_{tt}=4u_{xx}+\delta(t-3,x-2), \ (t>0, \ \ 0<x<5) \\ u(t,0)=u_x(t,5)=0, \\ u(0,x)=\sin\dfrac{1}{2}\pi x+3\sin\dfrac{3}{10}\pi x, \ \ u_t(0,x)=0. \end{cases}$$

五(12分) 利用分离变量求解以下边值问题:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial u}{\partial r})+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \ \ (r=\sqrt{x^2+y^2}<2, \ 0<z<3) \\ u\mid_{r=2}=0, \\ u\mid_{z=0}=8-2r^2, \ \ u\mid_{z=3}=0. \end{cases}$$

六. **(16分)** 已知以下形式初值问题

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} + a^2 u_{yy} + bu_x + cu, & (t > 0,\ -\infty < x, y < +\infty) \\ u\mid_{t=0} = \varphi(x) + g(x,y). \end{cases}$$

(1)当$a = b = c = 0$, $g(x,y) = 0$时，设u不依赖于y，求这时$u = u(t,x)$的解的表达式。

(2)当$a = 1$, $b = 3$, $c = 2$, $\varphi(x) = x$, $g(x,y) = 5e^{-x^2-y^2}$时，求这时解$u(t,x,y)$.

七. **(10分)**求解以下定解问题，其中(r,θ,φ)为球坐标.

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0, & 1 < r < 3 \\ u|_{r=1} = \cos 2\theta - 1 \\ u\mid_{r=3} = 21 + \cos\theta. \end{cases}$$

八**(10分)** 求解边值问题：

$$\begin{cases} u_{xx} + 4u_{yy} = 0, & (x > 3,\ y > 0) \\ u = \begin{cases} g(y), & 当x = 3,\ y > 0 \\ f(x), & 当x \geq 3,\ y = 0 \end{cases} \end{cases}$$

参考公式

1)直角坐标系:$\Delta_3 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, 柱坐标系:$\Delta_3 u = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial u}{\partial r}) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$,

球坐标系:$\Delta_3 u = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$.

2) Bessel函数在三类边界条件下的模平方分别为： $N_{\nu 1n}^2 = \dfrac{a^2}{2}J_{\nu+1}^2(\omega_{1n}a)$,

$N_{\nu 2n}^2 = \dfrac{1}{2}[a^2 - \dfrac{\nu^2}{\omega_{2n}^2}]J_\nu^2(\omega_{2n}a)$, $\quad N_{\nu 3n}^2 = \dfrac{1}{2}[a^2 - \dfrac{\nu^2}{\omega_{3n}^2} + \dfrac{a^2\alpha^2}{\beta^2\omega_{3n}^2}]J_\nu^2(\omega_{3n}a)$.

Bessel函数有递推公式： $(x^\nu J_\nu)' = x^\nu J_{\nu-1}$, $\quad (x^{-\nu}J_\nu)' = -x^{-\nu}J_{\nu+1}$,

$2J_\nu' = J_{\nu-1} - J_{\nu+1}$, $\quad 2\nu x^{-1}J_\nu = J_{\nu-1} + J_{\nu+1}$.

3) n阶Legendre多项式：$P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$, $n = 0,1,2,3,\ldots$; 递推公式：

1. $(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$, 2. $nP_n(x) - xP_n'(x) + P_{n-1}'(x) = 0$,
3. $nP_{n-1}(x) - P_n'(x) + xP_{n-1}'(x) = 0$, 4. $P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) = (2n+1)P_n(x)$.

4) $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda x d\lambda = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp(-\dfrac{x^2}{4a^2 t})$

5)由Poisson方程第一边值问题的格林函数$G(M;M_0)$,求相应问题的解$u(M)$的公式:

空间区域： $u(M) = \displaystyle\iiint_V f(M_0)G(M;M_0)dM_0 - \iint_S \varphi(M_0)\dfrac{\partial G}{\partial \vec{n_0}}(M;M_0)dS_0$,

平面区域： $u(M) = \displaystyle\iint_D f(M_0)G(M;M_0)dM_0 - \int_l \varphi(M_0)\dfrac{\partial G}{\partial \vec{n_0}}(M;M_0)dl_0$.

参考解答和参考评分标准

一 解：由S-L定理，可设$\lambda=\omega^2>0$,这样解得

$$y=A\cos\omega x+B\sin\omega x, \text{ ....6 分}$$

由$y(0)=0\Longrightarrow A=0,\ y(21)=B\sin 21\omega=0$, 因此$21\omega=n\pi\Longrightarrow\omega=\frac{n\pi}{21}$, $n=1,2,3....$得

$$\text{固有值}:\lambda_{\mathbf{n}}=\left(\frac{\mathbf{n}\pi}{\mathbf{21}}\right)^{\mathbf{2}},\text{，固有函数}:\mathbf{y_n(x)}=\sin\frac{\mathbf{n}\pi\mathbf{x}}{\mathbf{21}}\text{ ....12分}$$

二 解：(1)在$f(t,x)=0$时,由达朗贝尔公式:

$$u=\frac{2}{2}\left[(x+2t)^2+(x-2t)^2\right]+\frac{1}{2\times 2}\int_{x-2t}^{x+2t}3\cos\xi d\xi=\mathbf{2x^2+8t^2+\frac{3}{2}\sin 2t\cos x}$$

....8分

(2)在$f(t,x)=t^2x+5\sin 2t\sin x$时,由叠加原理：$u=u_1+u_2+u_3$, 其中

$$\begin{cases}u_{1tt}=4u_{1xx},\ (t>0,\ -\infty<x<+\infty)\\ u_1(0,x)=2x^2,\ u_{1t}(0,x)=3\cos x\end{cases}$$

$$\begin{cases}u_{2tt}=4u_{2xx}+t^2x,\ (t>0,\ -\infty<x<+\infty)\\ u_2(0,x)=0,\ u_{2t}(0,x)=0\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}u_{3tt}=4u_{3xx}+5\sin 2t\sin x,\ (t>0,\ -\infty<x<+\infty)\\ u_3(0,x)=0,\ u_{3t}(0,x)=0\end{cases}$$

由第一问的结论：$u_1=2x^2+8t^2+\frac{3}{2}\sin 2t\cos x$, 直接观察可得：$u_2=\frac{t^4}{12}x$, 使用冲量原理，求得：

$$u_3=\frac{5}{2\times 2}\int_0^t d\tau\int_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)}\sin 2\tau\sin\xi d\xi=\frac{5}{2}\int_0^t\sin x\sin 2(t-\tau)\sin 2\tau\, d\tau$$

$$=\frac{5}{4}\sin x\int_0^t(\cos(2t-4\tau)-\cos 2t)\,d\tau=\frac{5}{8}\sin 2t\sin x-\frac{5}{4}t\cos 2t\sin x$$

综上，这时

$$\mathbf{u=2x^2+8t^2+\frac{3}{2}\sin 2t\cos x+\frac{t^4}{12}x+\frac{5}{8}\sin 2t\sin x-\frac{5}{4}t\cos 2t\sin x}$$

....16分

三 解：特征方程为：

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-3y}$$

得到首次积分:$x^3y=c$, 因此作变换:

$$\xi = x^3 y,\quad \eta = y, \quad \text{..5分}$$

方程化为:

$$-3\eta\frac{\partial u}{\partial \eta}+u=0. \Longrightarrow u=f(\xi)(\eta)^{\frac{1}{3}}=f(x^3y)y^{\frac{1}{3}}$$

再利用定解条件$u(1,y)=y+3y^2$, 得到$f(\xi)=\xi^{\frac{5}{3}}+\xi^{\frac{2}{3}}$, 最后得到

$$\mathbf{u(x,y)=3x^5y^2+x^2y}$$

....10分

四.. 解: 使用叠加原理: $u=u_1+u_2$其中

$$\begin{cases} u_{1tt}=4u_{1xx},\ (t>0,\quad 0<x<5) \\ u_1(t,0)=u_{1x}(t,5)=0, \\ u_1(0,x)=\sin\frac{1}{2}\pi x+3\sin\frac{3}{10}\pi x,\quad u_{1t}(0,x)=0. \end{cases}$$

以及

$$\begin{cases} u_{2tt}=4u_{2xx}+\delta(t-3,x-2),\ (t>0,\quad 0<x<5) \\ u_2(t,0)=u_{2x}(t,5)=0, \\ u_2(0,x)=0,\quad u_{2t}(0,x)=0. \end{cases}$$

为了求u_1,作分离变量$u_1=T(t)X(x)$, 得到固有值问题:

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0,\ (0<x<21) \\ X(0)=0,\quad X'(5)=0. \end{cases}$$

和常微: $T''+4\lambda T=0$. 其中固有值问题的固有值和固有函数为:

$$\lambda_n=\left(\frac{2n\pi+\pi}{10}\right)^2,\ X_n(x)=\sin\frac{2n\pi+\pi}{10}x$$

相应地$T_n(t)=C_n\cos\frac{2n\pi+\pi}{5}t+D_n\sin\frac{2n\pi+\pi}{5}t$, 这样, 由叠加原理可设:

$$u_1(t,x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(C_n\cos\frac{2n\pi+\pi}{5}t+D_n\sin\frac{2n\pi+\pi}{5}t\right)\sin\frac{2n\pi+\pi}{10}x$$

再由u_1的初值条件, 定出:

$$u_1=3\cos\frac{3\pi}{5}t\sin\frac{3}{10}\pi x+\cos\pi t\sin\frac{1}{2}\pi x$$

....6分

为了求u_2, 利用冲量原理

$$u_2=\int_0^t W(t,x,\tau)d\tau$$

$W(t,x,\tau)$满足：

$$\begin{cases} W_{tt}=4W_{xx},\ (t>\tau,\quad 0<x<5) \\ W(t,0)=W_x(t,5)=0, \\ W\mid_{t=\tau}=0,\quad W_t\mid_{t=\tau}=\delta(\tau-3,x-2). \end{cases}$$

利用变换$t_1=t-\tau$, 并利用分离变量法，类似求得：

$$W(t,x,\tau)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(F_n\cos\frac{2n\pi+\pi}{5}(t-\tau)+G_n\sin\frac{2n\pi+\pi}{5}(t-\tau)\right)\sin\frac{2n\pi+\pi}{10}x$$

再利用W在$t=\tau$的条件，得到F_n=0, 而G_n满足：

$$\sum_{n=0}^{+\infty}G_n\frac{2n\pi+\pi}{5}\sin\frac{2n\pi+\pi}{10}x=\delta(\tau-3,x-2)=\delta(\tau-3)\delta(x-2).$$

得出：

$$G_n=\frac{2}{2n\pi+\pi}\sin\frac{2n\pi+\pi}{5}\delta(\tau-3)$$

即

$$W(t,x,\tau)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{2n\pi+\pi}\delta(\tau-3)\sin\frac{2n\pi+\pi}{5}\sin\frac{2n\pi+\pi}{5}(t-\tau)\right)\sin\frac{2n\pi+\pi}{10}x$$

因此

$$u_2(t,x)=\begin{cases}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{2n\pi+\pi}\sin\frac{2n\pi+\pi}{5}\sin\frac{2n\pi+\pi}{5}(t-3)\right)\sin\frac{2n\pi+\pi}{10}x,\ t\geq 3\\ 0, \qquad t<3\end{cases}$$

综上，此定解问题的解：

$\mathbf{u(t,x)}=$

$$\begin{cases}\mathbf{3\cos\frac{3\pi}{5}t\sin\frac{3}{10}\pi x+\cos\pi t\sin\frac{1}{2}\pi x+\sum_{n=0}^{+\infty}[\frac{2}{2n\pi+\pi}\sin\frac{2n\pi+\pi}{5}\sin\frac{2n\pi+\pi}{5}(t-3)]\sin\frac{2n\pi+\pi}{10}x,\ t\geq} \\ \mathbf{3\cos\frac{3\pi}{5}t\sin\frac{3}{10}\pi x+\cos\pi t\sin\frac{1}{2}\pi x}. \qquad \mathbf{t<3}.\end{cases}$$

....14分

五　解: 作分离变量，令$u=R(r)Z(z)$, 则有

$$\frac{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dR(r)}{dr})}{R}+\frac{\frac{d^2Z(z)}{dz^2}}{Z}=0$$

考虑到齐次边界条件并在$r=0$附加自然边界条件, 得到Bessel方程固有值问题：

$$\begin{cases} r^2R''+rR'+\lambda r^2R=0, \\ |R(0)|<+\infty,\ R(2)=0 \end{cases}$$

和微分方程$Z''-\lambda Z=0$. 进一步求得一系列分离变量形式的解:

$$u_n(r,z)=(A_n ch\omega_n z+B_n sh\omega_n z)\,J_0(\omega_n r)$$

其中ω_n是代数方程$J_0(2\omega)=0$的第n个正根。由叠加原理,

$$u(r,z)=\sum_{n=1}^{+\infty}(A_n ch\omega_n z+B_n sh\omega_n z)\,J_0(\omega_n r)$$

利用边界条件:

$$u(r,3)=\sum_{n=1}^{+\infty}(A_n ch3\omega_n+B_n sh3\omega_n)\,J_0(\omega_n r)=0\Longrightarrow B_n=-\frac{ch3\omega_n}{sh3\omega_n}A_n=-cth3\omega_n A_n$$

$$u(r,0)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_n J_0(\omega_n r)=8-r^2$$

....7分

结合递推公式,可算出广义Fourier系数:

$$A_n=\frac{\int_0^2 r(8-2r^2)J_0(\omega_n r)dr}{N_{0n}^2}=2\frac{\int_0^2 r(4-r^2)J_0(\omega_n r)dr}{N_{0n}^2}=\frac{2}{N_{0n}^2}\frac{1}{\omega_n^2}\int_0^{2\omega_n}t\left(4-\frac{t^2}{\omega_n^2}\right)J_0(t)dt$$

$$=\frac{2}{N_{0n}^2\omega_n^2}\left[(4-\frac{t^2}{\omega_n^2})tJ_1(t)\Big|_0^{2\omega_n}+\frac{2}{\omega_n^2}\int_0^{2\omega_n}t^2J_1(t)dt\right]=\frac{8J_2(2\omega_n)}{\omega_n^2J_1^2(2\omega_n)}=\frac{16}{\omega_n^3J_1(2\omega_n)}.$$

进一步

$$B_n=-\frac{16cth3\omega_n}{\omega_n^3J_1(2\omega_n)}$$

最后

$$\mathbf{u(r,z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{16}{\omega_n^3J_1(2\omega_n)}ch\omega_n z-\frac{16cth3\omega_n}{\omega_n^3J_1(2\omega_n)}sh\omega_n z\right)J_0(\omega_n r)}$$

....12分

六. 解: (1) 这时定解问题对应于:

$$\begin{cases}u_t=4u_{xx}\ \ (t>0,-\infty<x<+\infty)\\ u\,|_{t=0}=\varphi(x).\end{cases}$$

作Fourier变换,令$\overline{u}(t,\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(t,x)e^{-i\lambda x}dx$, 则经过Fourier 变换,像函数$\overline{u}$满足:

$$\begin{cases}\dfrac{d\overline{u}}{dt}=-4\lambda^2\overline{u}\\ \overline{u}\,|_{t=0}=\overline{\varphi}(\lambda)\end{cases}$$

于是解得：

$$\overline{u}=\overline{\varphi}(\lambda)e^{-4\lambda^2 t}$$

作反变换：

$$u(t,x)=\frac{1}{4\sqrt{\pi t}}\exp(-\frac{x^2}{16t})*\varphi(x)=\frac{1}{4\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\frac{(x-\xi)^2}{16t})\varphi(\xi)\,d\xi$$

....8分

(2)当$a=1,\ b=3,c=2,\ \varphi(x)=x,\ g(x,y)=5e^{-x^2-y^2}$时，

$$\begin{cases}u_t=4u_{xx}+u_{yy}+3u_x+2u,\ \ (t>0,-\infty<x,y<+\infty)\\ u\mid_{t=0}=x+5e^{-x^2-y^2}.\end{cases}$$

令$\overline{u}(t,\lambda,\mu)=\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}u(t,x,y)e^{-i(\lambda x+\mu y)}dxdy$, 则经过Fourier 变换，像函数$\overline{u}$满足：

$$\begin{cases}\frac{d\overline{u}}{dt}=(-4\lambda^2-\mu^2+3i\lambda+2)\overline{u}\\ \overline{u}\mid_{t=0}=2\pi h(\lambda)\delta(u)+G(\lambda,\mu)\end{cases}$$

其中$h(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,e^{-i\lambda x}dx,\ G(\lambda,\mu)=\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}5e^{-x^2-y^2}e^{-i(\lambda x+\mu y)}dxdy$,于是解得：

$$\overline{u}(t,\lambda,\mu)=2\pi h(\lambda)\delta(u)e^{(-4\lambda^2-\mu^2+3i\lambda+2)t}+G(\lambda,\mu)e^{(-4\lambda^2-\mu^2+3i\lambda+2)t}$$

作反变换：

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}2\pi h(\lambda)\delta(u)e^{(-4\lambda^2-\mu^2+3i\lambda+2)t}e^{i(\lambda x+\mu y)}d\lambda d\mu=\frac{e^{2t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}h(\lambda)e^{-4\lambda^2 t}e^{i\lambda(x+3t)}d\lambda$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}h(\lambda)e^{-4\lambda^2 t}e^{i\lambda x}d\lambda=x*\frac{1}{4\sqrt{\pi t}}\exp(-\frac{x^2}{16t})=\frac{1}{4\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\xi)\exp(-\frac{\xi^2}{16t})d\xi$$

$$=\frac{x}{4\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\frac{\xi^2}{16t})d\xi=\frac{x}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\tau^2}d\tau=x$$

这样

$$F^{-1}\left[2\pi h(\lambda)\delta(u)e^{(-4\lambda^2-\mu^2+3i\lambda+2)t}\right]=e^{2t}(x+3t)$$

同样

$$F^{-1}\left[G(\lambda,\mu)e^{(-4\lambda^2-\mu^2)t}\right]=5e^{-x^2-y^2}*(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}})(\frac{1}{4\sqrt{\pi t}})\exp\{-\frac{x^2}{16t}-\frac{y^2}{4t}\}$$

$$e^{-x^2}*\frac{1}{4\sqrt{\pi t}}\exp\{-\frac{x^2}{16t}\}=\frac{1}{\sqrt{1+16t}}e^{-\frac{1}{1+16t}x^2},\ \ e^{-y^2}*\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\{-\frac{y^2}{4t}\}=\frac{1}{\sqrt{1+4t}}e^{-\frac{1}{1+4t}y^2}$$

这样

$$F^{-1}\left[G(\lambda,\mu)e^{(-4\lambda^2-\mu^2)t}\right]=\frac{5}{8\pi t}\frac{1}{\sqrt{1+16t}}\frac{1}{\sqrt{1+4t}}e^{-\frac{1}{1+16t}x^2-\frac{1}{1+4t}y^2}$$

进一步

$$F^{-1}\left[G(\lambda,\mu)e^{(-4\lambda^2-\mu^2+3i\lambda+2)t}\right]=\frac{5}{8\pi t}\frac{e^{2t}}{\sqrt{1+16t}}\frac{1}{\sqrt{1+4t}}e^{-\frac{1}{1+16t}(x+3t)^2-\frac{1}{1+4t}y^2}$$

综上，求得$u(t,x,y,)$为

$$\mathbf{u(t,x,y)=e^{2t}(x+3t)+\frac{5}{8\pi t}\frac{e^{2t}}{\sqrt{1+16t}}\frac{1}{\sqrt{1+4t}}e^{-\frac{1}{1+16t}(x+3t)^2-\frac{1}{1+4t}y^2}}$$

……………………………………………………………………………………16分

七. 解: 使用球坐标下Laplace 方程轴对称情形下的求解公式:

$$u=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(A_nr^n+B_nr^{-(n+1)}\right)P_n(\cos\theta)$$

……………………………………………………………………………………4分

利用边界条件得到:

$$u\mid_{r=1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(A_n+B_n)P_n(\cos\theta)=2\cos^2\theta-2$$

$$u\mid_{r=2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(A_n3^n+B_n3^{-(n+1)}\right)P_n(\cos\theta)=2021+\cos\theta$$

利用变换$x=\cos\theta$, 并在以上两式比较系数得到:

$$(A_0+B_0)P_0(x)+(A_1+B_1)P_1(x)+(A_2+B_2)P_2(x)=2x^2-2$$

$$(A_0+\frac{B_0}{3})P_0(x)+(3A_1+\frac{B_1}{9})P_1(x)+(9A_2+\frac{B_2}{27})P_2(x)=21+x$$

又根据$P_n(x)$的表示, 算得

$$P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,\ P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

因此

$$(A_0+B_0)P_0(x)+(A_1+B_1)P_1(x)+(A_2+B_2)P_2(x)=-\frac{4}{3}P_0(x)+\frac{4}{3}P_2(x)$$

$$(A_0+\frac{B_0}{3})P_0(x)+(3A_1+\frac{B_1}{9})P_1(x)+(9A_2+\frac{B_2}{27})P_2(x)=21P_0(x)+P_1(x)$$

于是得到:

$$A_0+B_0=-\frac{4}{3},\ \ A_0+\frac{B_0}{3}=21,\ A_1+B_1=0,\ 3A_1+\frac{B_1}{9}=1,\ \ A_2+B_2=\frac{4}{3},\ 9A_2+\frac{B_2}{27}=0$$

解得:

$$A_0=\frac{193}{6},\ B_0=-\frac{67}{2},\ A_1=\frac{9}{26},\ B_1=-\frac{9}{26},\ A_2=-\frac{2}{363},\ B_2=\frac{162}{121}$$

所以

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},\theta)=\frac{193}{6}-\frac{67}{2}\mathbf{r}^{-1}+\left(\frac{9}{26}\mathbf{r}-\frac{9}{26}\mathbf{r}^{-2}\right)\mathbf{P}_1(\cos\theta)+\left(-\frac{2}{363}\mathbf{r}^2+\frac{162}{121}\mathbf{r}^{-3}\right)\mathbf{P}_2(\cos\theta)$$

……………………………………………………………………………………10分

八 解：作坐标变换$\overline{x}=x-3$, $\overline{y}=\frac{y}{2}$, 这样原问题变为

$$\begin{cases} u_{\overline{x}\overline{x}}+4u_{\overline{y}\overline{y}}=0,\ \overline{x}>0,\ \overline{y}>0, \\ u=\begin{cases} g(2\overline{y})\text{当}\overline{x}=0,\ \overline{y}>0 \\ f(\overline{x}+3)\text{当}\overline{x}>0,\ \overline{y}=0 \end{cases} \end{cases}$$

利用镜像法，在$M_0=(\overline{\xi},\overline{\eta})$, $M_1=(\overline{\xi},-\overline{\eta})$, $M_2=(-\overline{\xi},\overline{\eta})$, $M_3=(-\overline{\xi},-\overline{\eta})$ 依次放$+\epsilon$, $-\epsilon$, $-\epsilon$, $+\epsilon$的线电荷，产生电场电式叠加就是区域$(\overline{x}>0,\overline{y}>0)$的格林函数：

$$\overline{G}=\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(\overline{x}+\overline{\xi})^2+(\overline{y}-\overline{\eta})^2}+\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(\overline{x}-\overline{\xi})^2+(\overline{y}+\overline{\eta})^2}$$
$$-\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(\overline{x}-\overline{\xi})^2+(\overline{y}-\overline{\eta})^2}-\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(\overline{x}+\overline{\xi})^2+(\overline{y}+\overline{\eta})^2}$$

……………………………………………………………………………………4分

对于区域在$\overline{y}=0$的边界，其外法方向$\vec{n_0}=(0,-1)$，则$\frac{\partial G}{\partial \vec{n_0}}|_{\overline{\eta}=0}=-\frac{\partial G}{\partial\overline{\eta}}|_{\overline{\eta}=0}$,

$$\frac{\partial G}{\partial\overline{\eta}}|_{\overline{\eta}=0}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{(\overline{\eta}-\overline{y})}{(\overline{x}+\overline{\xi})^2+(\overline{y}-\overline{\eta})^2}+\frac{(\overline{\eta}+\overline{y})}{(\overline{x}-\overline{\xi})^2+(\overline{y}+\overline{\eta})^2}\right)\Bigg|_{\overline{\eta}=0}$$
$$-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{(\overline{\eta}-\overline{y})}{(\overline{x}-\overline{\xi})^2+(\overline{y}-\overline{\eta})^2}+\frac{(\overline{\eta}+\overline{y})}{(\overline{x}+\overline{\xi})^2+(\overline{y}+\overline{\eta})^2}\right)\Bigg|_{\overline{\eta}=0}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\overline{y}}{(\overline{x}-\overline{\xi})^2+\overline{y}^2}-\frac{\overline{y}}{(\overline{x}+\overline{\xi})^2+\overline{y}^2}\right).$$
$$\frac{\partial G}{\partial\overline{\xi}}|_{\overline{\xi}=0}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\overline{x}}{\overline{x}^2+(\overline{y}-\overline{\eta})^2}-\frac{\overline{x}}{\overline{x}^2+(\overline{y}+\overline{\eta})^2}\right).$$

因此

$$u(\overline{x},\overline{y})=\int_{\substack{\overline{\eta}=0\\(\overline{\xi}>0)}}f(\overline{\xi}+3)\frac{\partial G}{\partial\overline{\eta}}d\overline{\xi}+\int_{\substack{\overline{\xi}=0\\(\overline{\eta}>0)}}g(2\overline{\eta})\frac{\partial G}{\partial\overline{\xi}}d\overline{\eta}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}f(\overline{\xi}+3)\left(\frac{\overline{y}}{(\overline{x}-\overline{\xi})^2+\overline{y}^2}-\frac{\overline{y}}{(\overline{x}+\overline{\xi})^2+\overline{y}^2}\right)d\overline{\xi}$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}g(2\overline{\eta})\left(\frac{\overline{x}}{\overline{x}^2+(\overline{y}-\overline{\eta})^2}-\frac{\overline{x}}{\overline{x}^2+(\overline{y}+\overline{\eta})^2}\right)d\overline{\eta}$$

最后，利用$\overline{x}=x-3$, $\overline{y}=\frac{y}{2}$,得到：

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathbf{f}(\xi+3)\left(\frac{\mathbf{y}}{4(\mathbf{x}-3-\xi)^2+\mathbf{y}^2}-\frac{\mathbf{y}}{4(\mathbf{x}-3+\xi)^2+\mathbf{y}^2}\right)\mathbf{d}\xi$$
$$+\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathbf{g}(2\eta)\left(\frac{\mathbf{x}-3}{4(\mathbf{x}-3)^2+(\mathbf{y}-2\eta)^2}-\frac{\mathbf{x}-3}{4(\mathbf{x}-3)^2+(\mathbf{y}+2\eta)^2}\right)\mathbf{d}\eta.$$

……………………………………………………………………………………10分